جامعة البعث	**امتحان مقرر نظرية الاحتمالات**	**الاسم :**
كلية العلوم	**لطلاب السنة الثالثة رياضيات**	**المدة : 90 دقيقة**
قسم الرياضيات	**الفصل الدراسي الثاني للعام 2015 – 2016**	**الدرجة : 100**

السؤال الأول (60 درجة):

أ) X متغير عشوائي منتظم على المجال $[0\,,\,1]$ والمطلوب :

1) عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y=-\ln X$. 2) عين الدالة التوزيعية لـ Y. 3) احسب $P(Y>1)$.

4) بفرض $Y_1,Y_2,.....,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ عين الدالة المولدة للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n}Y_i$.

5) عين $V(3Z)\,,E(3Z)$. 6) عين الدالة المولدة للمتغير $W=\ln\left(\frac{1-X}{X}\right)$.

7) بفرض أن Y_1,Y_2 متغيران عشوائيان مستقلان ولكل منهما نفس توزيع Y عندئذٍ:

❶ احسب $E(Y_1\cdot Y_2)\,,\,M_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2)\,,\,\rho(3Y_1,4Y_2+2)$. ❷ عين الدالة التوزيعية المشتركة لـ Y_1,Y_2.

❸ احسب $P(Y_1>1,Y_2>1)$. ❹ عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $U=\min\{Y_1,Y_2\}$.

❺ عين التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين $Z_1=\frac{Y_1}{Y_2}\;\;,\;\;Z_2=Y_2$.

ب) بفرض $f(x/y)=\frac{1}{2y}e^{-\frac{x}{2y}}$ دالة كثافة شرطية لـ X حيث Y، والمطلوب:

1) عين الدالة التوزيعية الشرطية لـ X حيث Y . 2) احسب $P(X>4/Y=2)$.

3) احسب $M_{X/Y=1}(t)\,,\,E(X/Y=1)\,,\,V(X/Y=1)$.

السؤال الثاني(40 درجة):

أ) افرض X متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda=2$، والمطلوب:

1) عين كل من الدالة المولدة والدالة التراكمية والدالة المولدة للعزوم العاملية والدالة المولدة للعزوم المركزية للمتغير X.

2) بفرض Y متغير عشوائي مستقل عن X وله نفس التوزيع الاحتمالي بنفس الوسيط عندئذٍ احسب: $P(X+Y=n)$ و $P(X=k/X+Y=n)$.

ب) افرض X متغيراً عشوائياً دالته المميزة $\psi_X(t)=e^{-2|t|};\;t\in\mathbb{R}$، والمطلوب:

1) عين التوزيع الاحتمالي لـ X. 2) عين الدالة التوزيعية لـ X. 3) بفرض $X_1,X_2,.......,X_n$ عينة عشوائية لـ X عندئذٍ استخدم أسلوب الدالة المميزة لتعيين التوزيع الاحتمالي لـ $\overline{X}$.

4) بفرض حجم العينة $n=2$، عندئذٍ عين الدالة التوزيعية المشتركة لـ X_1,X_2

5) احسب $P(X_1<2\,,X_2<2)$.

حمص في 28 / 6 /2016	انتهت الأسئلة	مدرس المقرر : د.هيثم فرح

السؤال الأول:

أ)

1) بما أن X متغير عشوائي منتظم على المجال $[0,1]$ فإن دالة كثافته هي :

$$f_X(x)=1\ ;\ x\in[0,1]$$

ولدينا :

$$Y=-\ln X \Rightarrow -Y=\ln X \Rightarrow \boxed{X=e^{-Y}} \Rightarrow \frac{dX}{dY}=-e^{-Y} \Rightarrow \boxed{\left|\frac{dX}{dY}\right|=e^{-Y}}$$

ومنه نجد أن :

$$f_Y(y)=f_X(x)\left|\frac{dx}{dy}\right|\Bigg|_{x=e^{-y}}=1\left(\frac{1}{2}e^{-y}\right)\Bigg|_{x=e^{-y}}=e^{-y} \Rightarrow f_Y(y)=e^{-y}\quad ;\ y>0$$

واضح أن Y متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=1$.

2) بما أن Y متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda=1$ فإن الدالة التوزيعية له هي :

$$F_Y(y)=1-e^{-y}\quad ;\ y>0$$

3) حساب $P(Y>1)$:

$$P(Y>1)=1-P(Y\le 1)=1-F_Y(1)=1-\left(1-e^{-(1)}\right)=e^{-1}=\frac{1}{e}$$

4) بما أن $Y_1,Y_2,\dots\dots,Y_n$ عينة عشوائية لـ Y عندئذٍ فإن الدالة المولدة للمتغير $Z=\sum_{i=1}^{n}Y_i$ هي:

$$M_Z(t)=M_{\sum_{i=1}^{n}Y_i}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{Y_i}(t)=\left[M_Y(t)\right]^n=\left[(1-t)^{-1}\right]^n=(1-t)^{-n}$$

واضح أن الدالة المولدة للمتغير العشوائي Z هي دالة مولدة لمتغير عشوائي غماوي بالوسيطين $\lambda=n$ و $\alpha=1$.

5) إيجاد $V(3Z)\ ,\ E(3Z)$:

بما أن المتغير عشوائي Z غماوي بالوسيطين $\lambda=n$ و $\alpha=1$ فإن :

$$E(Z)=\frac{\lambda}{\alpha}=\frac{n}{(1)}=n \qquad , \qquad V(Z)=\frac{\lambda}{\alpha^2}=\frac{n}{(1)^2}=n$$

وبالتالي فإنَّ:

$$E(3Z)=3E(Z)=3n \qquad , \qquad V(3Z)=9V(Z)=9n$$

6) تعين الدالة المولدة للمتغير $W=\ln\left(\frac{1-X}{X}\right)$:

$$M_W(t)=E\left(e^{tw}\right)=E\left(e^{t\ln\left(\frac{1-X}{X}\right)}\right)=E\left(e^{\ln\left(\frac{1-X}{X}\right)^t}\right)=E\left(\left(\frac{1-X}{X}\right)^t\right)=\int_0^1\left(\frac{1-x}{x}\right)^t f_X(x)\,dx=$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x)^t}{x^t}\,dz=\int_0^1 x^{-t}(1-x)^t\,dz=\beta(1-t,1+t)=\frac{\Gamma(1-t)\Gamma(t+1)}{\Gamma(1-t+t+1)}=\frac{\Gamma(1-t)\Gamma(t+1)}{\Gamma(2)}=$$

$$= t\,\Gamma(t)\Gamma(1-t) = t\,\frac{\pi}{\sin \pi t} = \frac{\pi t}{\sin \pi t} \Rightarrow \boxed{M_W(t) = \frac{\pi t}{\sin \pi t}}$$

7) بما أنَّ Y_1, Y_2 متغيران عشوائيان **مستقلان** ولكل منهما نفس توزيع Y فإنَّ:

❶ حساب المقادير:

$$E(Y_1.Y_2) = E(Y_1).E(Y_2) = (1).(1) = 1$$

$$M_{(Y_1,Y_2)}(t_1,t_2) = M_{(Y_1)}(t_1).M_{(Y_2)}(t_2) = (1-t_1)^{-1}.(1-t_2)^{-1} = \frac{1}{(1-t_1).(1-t_2)}$$

$$\rho(3Y_1, 4Y_2+2) = \rho(Y_1, Y_2) = 0$$

❷ تعيين الدالة التوزيعية المشتركة للمتغيرين Y_1, Y_2 :

$$F_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = F_{Y_1}(y_1).F_{Y_2}(y_2) = \left(1-e^{-y_1}\right).\left(1-e^{-y_2}\right) \;;\; y_1>0\;,\; y_2>0$$

❸ حساب $P(Y_1>1, Y_2>1)$:

$$P(Y_1>1,Y_2>1) = P(Y_1>1).P(Y_2>1) = \left[1-P(Y_1\le 1)\right].\left[1-P(Y_2\le 1)\right] =$$

$$= \left[1-F_{Y_1}(1)\right].\left[1-F_{Y_2}(1)\right] = \left[1-\left(1-e^{-(1)}\right)\right].\left[1-\left(1-e^{-(1)}\right)\right] = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$

❹ عين التوزيع الاحتمالي للمتغير $U = \min\{Y_1, Y_2\}$:

$$F_U(u) = P(U<u) = 1-P(U\ge u) = 1-P\left(\min\{Y_1,Y_2\}\ge u\right) =$$

$$= 1-P(Y_1\ge u\,, Y_2\ge u) = 1-P(Y_1\ge u)P(Y_2\ge u) =$$

$$= 1-\left[1-P(Y_1<u)\right]\left[1-P(Y_2<u)\right] = 1-\left[1-P(Y<u)\right]\left[1-P(Y<u)\right] =$$

$$= 1-\left[1-P(Y<u)\right]^2 = 1-\left[1-\left(1-e^{-u}\right)\right]^2 = 1-\left[e^{-u}\right]^2 = 1-e^{-2u} \;; u>0 \Rightarrow$$

$$f_U(u) = \frac{d}{du}F_U(u) = \frac{d}{du}\left[1-e^{-2u}\right] = 2e^{-2u} \;; u>0$$

من الواضح أنَّ U متغير عشوائي أسي بالوسيط $\lambda = 2$.

❺ عين التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين $Z_1 = \frac{Y_1}{Y_2} \;,\; Z_2 = Y_2$:

بما أن المتغيرين العشوائيين Y_1, Y_2 مستقلين فإن دالة الكثافة المشتركة لهما هي:

$$f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2) = f_{Y_1}(y_1).\,f_{Y_2}(y_2) = \left(e^{-y_1}\right)\left(e^{-y_2}\right) = e^{-(y_1+y_2)} \;;\; y_1>0\,,\; y_2>0$$

ولدينا $Z_2 = Y_2 \;,\; Z_1 = \frac{Y_1}{Y_2}$ وبالتالي فإن : $Y_1 = Z_1.Z_2 \;,\; Y_2 = Z_2$ ومنه فالمشتقات الجزئية هي :

$$\frac{\partial Y_2}{\partial Z_2} = 1 \quad,\quad \frac{\partial Y_2}{\partial Z_1} = 0 \quad,\quad \frac{\partial Y_1}{\partial Z_2} = Z_1 \quad,\quad \frac{\partial Y_1}{\partial Z_1} = Z_2$$

ومنه نجد أن :

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Y_1}{\partial Z_1} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial Z_2}\\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial Z_1} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial Z_2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}Z_2 & Z_1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=Z_2 \quad\Rightarrow\quad |J|=|Z_2|=Z_2$$

وبالتالي فإن دالة الكثافة المشتركة للمتغيرين $Z_1,\ Z_2$ تعطى بالعلاقة :

$$f_{(Z_1,Z_2)}(z_1,z_2)=f_{(Y_1,Y_2)}(y_1,y_2)|J|\Big|_{\substack{y_1=z_1.z_2\\ y_2=z_2}}=e^{-(y_1+y_2)}z_2\Big|_{\substack{y_1=z_1.z_2\\ y_1=z_1.z_2}}=z_2e^{-z_2(z_1+1)}\ ;z_1>0\ \ ,z_2>0$$

ب) لدينا $f(x/y)=\dfrac{1}{2y}e^{-\frac{x}{2y}}$ دالة كثافة شرطية لـ X حيث Y تكب بالشكل:

$$f(x/y)=\frac{1}{2y}e^{-\frac{1}{2y}x}\quad ;\ x>0$$

أي أنَّ المتغير العشوائي الشرطي X حيث Y هو متغير عشوائي من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=\dfrac{1}{2y}$.

1) تعين الدالة التوزيعية الشرطية لـ X حيث Y :

بما أنَّ المتغير العشوائي الشرطي X حيث Y هو متغير عشوائي من النمط الأسي بالوسيط $\lambda=\dfrac{1}{2y}$ فإنَّ الدالة التوزيعية الشرطية له:

$$F_{(X/Y)}(x/y)=1-e^{-\lambda x}=1-e^{-\frac{1}{2y}x}\ ;\ x>0$$

2) حساب $P(X>4/Y=2)$:

$$P(X>4/Y=2)=1-P(X\le 4/Y=2)=1-F_{(X/Y=2)}(4/y=2)=1-\left[1-e^{-\frac{1}{2(2)}(4)}\right]=\frac{1}{e}$$

3) حساب $M_{X/Y=1}(t)\ ,\ E(X/Y=1)\ ,V(X/Y=1)$:

$$M_{X/Y}(t)=\left(1-\frac{t}{\lambda}\right)^{-1}=\left(1-\frac{t}{\frac{1}{2y}}\right)^{-1}=(1-2yt)^{-1}\Rightarrow M_{X/Y=1}(t)=(1-2t)^{-1}$$

$$E(X/Y)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{(1/2y)}=2y\quad\Rightarrow\ E(X/Y=1)=2(1)=2$$

$$V(X/Y)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{(1/2y)^2}=4y^2\quad\Rightarrow V(X/Y=1)=4(1)^2=4$$

السؤال الثاني:

1) تعين كل من الدالة المولدة والدالة التراكمية والدالة المولدة للعزوم العاملية والدالة المولدة للعزوم المركزية للمتغير X:

بما أنَّ X متغير عشوائي بواسوني وسيطه $\lambda = 2$ فإنَّ $E(X) = \lambda = 2$ وكما أنَّ:

الدلة المولدة لـه هي:

$$M_X(t) = e^{-\lambda(1-e^t)} = e^{-2(1-e^t)}$$

الدالة التراكمية له هي:

$$K_X(t) = \ln[M_X(t)] = \ln\left[e^{-2(1-e^t)}\right] = -2(1-e^t)$$

الدالة المولدة للعزوم العاملية له هي:

$$M_{\frac{X \ln t}{t}}(t) = M_X(\ln t) = e^{-2(1-e^{\ln(t)})} = e^{-2(1-t)}$$

الدالة المولدة للعزوم المركزية:

$$M_{(X-EX)}(t) = E\left(e^{t(X-EX)}\right) = e^{-tEX} E\left(e^{tX}\right) = e^{-tEX} M_X(t) = e^{-2t}\left[e^{-2(1-e^t)}\right] = e^{-2(1+t-e^t)}$$

2) بفرض Y متغير عشوائي مستقل عن X وله نفس التوزيع الاحتمالي بنفس الوسيط عندئذٍ المطلوب هو حساب: $P(X+Y=n)$ و $P(X=k / X+Y=n)$:

إن الحدث $\{X+Y=n\}$ يكتب بالشكل :

$$\{X+Y=n\} = \{X=0, Y=n\} \cup \{X=1, Y=n-1\} \cup \cdots\cdots \cup \{X=n, Y=0\} =$$
$$= \bigcup_{i=0}^{n} \{X=i, Y=n-i\}$$

وهذه الأحداث مستقلة مثنى مثنى ، ومتنافية مثنى مثنى فإن :

$$P\{X+Y=n\} = P\left[\{X=0, Y=n\} \cup \{X=1, Y=n-1\} \cup \cdots\cdots \cup \{X=n, Y=0\}\right] =$$
$$= P\left\{\bigcup_{i=0}^{n} \{X=i, Y=n-i\}\right\} = \sum_{i=0}^{n} P\{X=i, Y=n-i\} = \sum_{i=0}^{n} P\{X=i\} P\{Y=n-i\} =$$
$$\sum_{i=0}^{n} P_X(i) P_Y(n-i) = \sum_{i=0}^{n}\left[e^{-2}\frac{2^i}{i!}\right]\left[e^{-2}\frac{2^{(n-i)}}{(n-i)!}\right] = e^{-4}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2^i 2^{(n-i)}}{i!(n-i)!}\right) =$$
$$= e^{-4}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{n!}{i!(n-i)!}\right)2^i 2^{(n-i)} = e^{-4}\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n} C_i^n 2^i 2^{(n-i)} = e^{-4}\frac{1}{n!}(2+2)^n = e^{-4}\frac{4^n}{n!}; n = 0,1,2,..$$

أي أن مجموع متغيرين عشوائيين بواسونيين لهما نفس الوسيط $\lambda = 2$ هو متغير عشوائي بواسوني جديد وسيطه $\lambda = 4$ أي مجموع الوسيطين .

وكما أنَّ:

$$P\{X=k / X+Y=n\} = \frac{P\{X=k, X+Y=n\}}{P\{X+Y=n\}} = \frac{P\{X=k, Y=n-k\}}{P\{X+Y=n\}}$$

$$=\frac{\left[e^{-2}\frac{2^k}{k!}\right]\left[e^{-2}\frac{2^{(n-k)}}{(n-k)!}\right]}{e^{-4}\frac{4^n}{n!}}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{2^k 2^{(n-k)}}{4^n}\right)=C_k^n\frac{2^k 2^{(n-k)}}{4^k 4^{(n-k)}}=$$

$$=C_k^n\left(\frac{2^k}{4^k}\right)\left(\frac{2^{(n-k)}}{4^{(n-k)}}\right)=C_k^n\left(\frac{2}{4}\right)^k\left(\frac{2}{4}\right)^{n-k}\quad\Rightarrow$$

$$P\{X=k/X+Y=n\}=C_k^n\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\quad;\quad k=0,1,2,....,n$$

واضح أن المتغير العشوائي الشرطي هو متغير عشوائي من النمط الثنائي وسيطاه n ، $p=\frac{1}{2}$.

ب) يتضح من الدالة المميزة $\psi_X(t)=e^{-2|t|};\ t\in\mathbb{R}$ أنَّ X متغير عشوائي من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,\ b=0$ وبالتالي فإنَّ:

1) التوزيع الاحتمالي لـ X هو:

$$f_X(x)=\frac{2}{\pi}\frac{1}{4+x^2}\quad;\ -\infty<x<+\infty$$

2) إن الدالة التوزيعية للمتغير العشوائي X من النمط كوشي بالوسيطين $a=2\,,b=0$ تعطى بالعلاقة :

$$F_X(x)=\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\quad,\ -\infty<x<+\infty$$

3) لدينا الدالة المميزة للمتغير العشوائي X هي :

$$\psi_X(t)=e^{-2|t|}$$

وبما أن $X_1,X_2,.....,X_n$ عينة عشوائية لـ X والمطلوب تعيين الدالة المميزة لـ $\overline{X}$ ، ثم تعيين التوزيع الاحتمالي $\overline{X}$.

$$\psi_{\overline{X}}(t)=\psi_{\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)/n}(t)=\prod_{i=1}^n\psi_{X_i}\left(\frac{t}{n}\right)=\prod_{i=1}^n\psi_X\left(\frac{t}{n}\right)=\left[\psi_X\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n=\left[e^{-2\left|\frac{t}{n}\right|}\right]^n=$$

$$=\left[e^{-2n\frac{|t|}{n}}\right]=e^{-2|t|}=\psi_X(t)$$

وهذا يعني أن لـ $\overline{X}$ نفس الدالة المميزة لـ X ، ومنه فإن للمتغير العشوائي $\overline{X}$ نفس التوزيع الاحتمالي لـ X ومنه فإن $\overline{X}$ هو متغير عشوائي من النمط كوشي بوسيطين الأول $a=2$ والثاني $b=0$.

4) بفرض حجم العينة $n=2$ ، والمطلوب تعيين الدالة التوزيعية المشتركة لـ X_1,X_2:

بما أنَّ X_1,X_2 عينة عشوائية لـ X فهما مستقلان ولهما نفس التوزيع الاحتمالي لـ X وبنفس الوسطاء وبالتالي فإنَّ:

$$F_{(X_1,X_2)}(x_1,x_2)=F_{X_1}(x_1).F_{X_2}(x_2)=$$

$$\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_1}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{x_2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]\ ,x_1\in\mathbb{R},x_2\in\mathbb{R}$$

5) حساب $P(X_1<2, X_2<2)$.

$$P(X_1<2, X_2<2)=P(X_1<2).P(X_2<2)=F_{X_1}(2).F_{X_2}(2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

أو يمكن الحل بالشكل:

$$P(X_1<2, X_2<2)=F_{(X_1,X_2)}(2,2)=$$

$$=\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right].\left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\frac{2}{2}\right)+\frac{1}{2}\right]=\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{2}\right]^2=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

انتهت الأجوبة

أ.أحمد حاتم أبو حاتم

0947075489